1Л

УДК 519.85

М.В. Леонова
Полтавський національний педагогічний університет імені В.Г. Короленка
Україна, 36000, м. Полтава, вул. Остроградського, 3

Алгоритм розв'язування задачі про оптимальні призначення методом гілок та меж

M.V. Leonova
Poltava V.G. Korolenko National Pedagogical University
Ukraine, 36000, c. Poltava, Ostrogradsky st., 3

Algorithm Solving the Problem of Optimal Function by Method of Branch and Bound

М.В. Леонова
Полтавский национальный педагогический университет имени В.Г. Короленка
Украина, 36000, г. Полтава, ул. Остроградского, 3

Алгоритм решения задачи об оптимальных назначениях методом границ и ветвей

Наведено нову (комбінаторну) модель задачі про призначення. Досліджено особливості використання методу гілок та меж для розв'язування задачі про призначення. Поліпшено оцінку допустимих множин у методі гілок та меж; розроблено алгоритм розв'язування задачі та проілюстровано його на прикладі.
Ключові слова: метод гілок та меж, задача про призначення, оцінювання підмножин, оптимізація на перестановках.

A new (combinatorial) model assignment problem. The features of the method branch and bound for solving the assignment problem. Improved assessment of admissible sets in branch and bound, the algorithm for solving the problem and illustrate it with an example.
Key words: method branch and bound, the task of appointment, evaluation of subsets, optimization on permutations.

Показана полная (комбинаторная) модель задачи о назначениях. Исследованы особенности использования метода ветвей и границ для решения задачи о назначениях. Улучшена оценка допустимых множеств в методе ветвей и границ; разработан и проиллюстрирован алгоритм решения задачи на примере.
Ключевые слова: метод ветвей и границ, задача о назначениях, оценка подмножеств, оптимизация на перестановках.

Вступ

Задача про призначення – одна з класичних задач цілочислової оптимізації [1]. Її суть полягає в тому, що є *n* видів робіт та *n* кандидатів для їх виконання (виконавців).

Вважається, що кожен з кандидатів $i \in J_n = \{1,...,n\}$ може виконувати будь-яку роботу $j \in J_n = \{1,...,n\}$, при цьому c_{ij} – ефективність виконаної роботи *j*-го виду *i*-м кандидатом.

Необхідно так розподілити кандидатів на виконання робіт, щоб кожен з кандидатів одержав єдине призначення, кожна з робіт одержала єдиного виконавця і сумарна ефективність, пов'язана з призначеннями, була максимальною.

Мета даної статті – розробити нову (комбінаторну) модель задачі про призначення.

Розробка алгоритму за методом гілок та меж є досить актуальною для задач такого типу, оскільки дає можливість використання його у розв'язуванні більш складних задач (наприклад, задача теорії розкладів) [2].

Побудуємо нову модель задачі в рамках евклідової комбінаторної оптимізації [3-5].

Введемо змінні:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, \textit{ якщо } i - \textit{та робота виконана } j - \textit{м виконавцем}; \\ 0, \textit{ в іншому випадку.} \end{cases}$$

Цільова функція має вигляд

$$F(x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \max . \quad (1)$$

Повинні виконуватись такі умови:

– на кожну роботу призначається тільки на один виконавець

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \ \forall j \in J_n ; \quad (2)$$

– кожен виконавець призначається тільки на одну роботу

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \ \forall i \in I_n . \quad (3)$$

$- \ x_{ij} \in \{0;1\}$.

Зауважимо, що остання умова може бути записана комбінаторно.

Розглянемо мультимножину $G = \{0^{n^2-n}, 1^n\}$ з основою $S(G) = (0,1)$ та первинною специфікацією $[G] = (n^2 - n; n)$.

Тоді допустимий розв'язок задачі про призначення є впорядкованою *k*-вибіркою з множини *G*, де $k = n^2$, тобто елементом загальної множини переставлень $E_{k,2}(G)$:

$$x \in (x_{11}, ..., x_{1n}, ..., x_{n1}, ..., x_{nn}) \in E_{k,2}(G). \quad (4)$$

Задача (1) – (4) є моделлю задачі про призначення як лінійної умовної повністю комбінаторної задачі на перестановках [2].

Оцінювання допустимих підмножин в методі гілок та меж

Моделі задач типу задачі про призначення, але з додатковими умовами (задачі теорії розкладів [2], є актуальними, але до них не можна застосовувати поліноміальні алгоритми (угорський метод [6]) тощо). Тому вбачається для таких задач (почавши з задачі про призначення) дослідити алгоритм у класі методу гілок та меж [4-6].

Метод гілок та меж (МГМ) – універсальний метод, який можна застосувати до будь-якої оптимізаційної задачі. У випадку задачі про призначення з матрицею ефективності $C = (c_{ij})$ будемо використовувати модель (1) – (4) цієї задачі у вигляді лінійної умовної задачі комбінаторної оптимізації на переставленнях.

У подальшому будемо вважати, що елементи *G* впорядковані по незростанню:

$$g_1 \ge ... \ge g_k , \quad (5)$$

тобто $g_1 = g_2 = ... = g_n = 1; \ g_{n+1} = g_{n+2} = ... = g_k = 0.$

Суттєвим для ефективності МГМ є оцінювання допустимих підмножин.

Як відомо [4-6], в задачі максимізації на множині D функції $F(x)$, оцінка для підмножини $D_l \subset D$ – це число $\nu_l \ge F(x)\ \forall x \in D_l$. У задачі мінімізації знак нерівності міняється на протилежний.

Для організації оптимізації за методом гілок та меж необхідно визначити: 1) спосіб оцінювання допоміжної підмножини D_l; 2) спосіб утворення D_l; 3) правило (правила) відсікання безперспективних чи порожніх підмножин D_l.

В рамках цієї роботи розглянемо оцінювання, а при виконанні алгоритму утворення та відсікання D_l, як це розглядалося в [4-6].

Оцінювання підмножини D_l можемо здійснювати за допомогою підходу викладеного в теоремі 5.3 [4, с. 129] у вигляді

$$\xi_l^* = \nu_l + c^*,$$

де ν_l – це сума частини доданків у цільовій функції $F(x)$ (1), що визначена вже заданими невідомими, які визначають D_l; c^* – оцінка невизначеної частини цільової функції $F(x)$ для D_l, тобто тих її доданків, що містять незадані в D_l змінні.

Оцінка ξ_l^* підмножини D_l може бути покращена за рахунок покращення c^* внаслідок викреслення з матриці C елементів, які стоять в рядках $i_1,...,i_l$ та стовпцях $j_1,...,j_l$.

Матрицю, утворену з матриці $C = C_{i_0}^{j_0}$ $(i_0 = j_0 = 0)$, позначимо $C_{i_0 \dots i_l}^{j_0 \dots j_l}$. Вона утворюється викресленням з $C_{i_0 \dots i_{l-1}}^{j_0 \dots j_{l-1}}$ рядка i_l, стовпця j_l. Підмножина множини допустимих розв'язків (2) – (4) $D_{i_1 i_2 \dots i_l}^{j_1 j_2 \dots j_l}$ задається значеннями змінних $x_{i_1 j_1} = x_{i_2 j_2} = \dots = x_{i_l j_l} = 1$. Елементи матриці $C_{i_0 \dots i_l}^{j_0 \dots j_l}$ перепозначимо і перенумеруємо так:

$$c_1^l \ge c_2^l \ge \dots \ge c_{(n-l)^2}^l, \tag{6}$$

не вказуючи залежності від пар (i_t, j_t), $t = 1,2,...,l$, якщо це не викликає плутанини.

Для зручності елементи матриці C^l будемо позначати як упорядковану множину $C^l = (c_{11}^l,...,c_{n-l,n-l}^l)$. При необхідності будемо використовувати елементи з C^l з індексами з C, тобто $c_{uv}^l = c_{ij}$.

Нехай $I^l = \{i_1, i_2, ..., i_l\}$, $J^l = \{j_1, j_2, ..., j_l\}$. Покращення оцінки допустимої підмножини сформульовано у вигляді такого твердження.

Теорема 1 (про оцінку в задачі максимізації). Оцінкою $\xi_{i_1 i_2 \dots i_l}^{j_1 j_2 \dots j_l}$ підмножини $D_{i_1 i_2 \dots i_l}^{j_1 j_2 \dots j_l}$ може слугувати величина

$$\xi_{i_1 i_2 \dots i_l}^{j_1 j_2 \dots j_l} = \nu_{i_1 i_2 \dots i_l}^{j_1 j_2 \dots j_l} + c_l^*, \tag{7}$$

де $c_l^* = \sum_{j=1}^{n-l} c_j^l$, а $\nu_{i_1 i_2 \dots i_l}^{j_1 j_2 \dots j_l}$ обчислюється так $\nu_{i_1 i_2 \dots i_l}^{j_1 j_2 \dots j_l} = \sum_{t=1}^{l} c_{i_t j_t}$.

Доведення. Якщо $x_{i_1 j_1} = x_{i_2 j_2} = ... = x_{i_l j_l} = 1$ визначають підмножину $D_{i_1 i_2 ... i_l}^{j_1 j_2 ... j_l}$, то для $\forall x \in D_{i_1 i_2 ... i_l}^{j_1 j_2 ... j_l}$

$$F(x) = \nu_{i_1 i_2 ... i_l}^{j_1 j_2 ... j_l} + \sum_{\substack{i \notin I^l \\ j \notin J^l}} c_{ij} x_{ij},$$

при виконанні умов (2) – (4). Що, очевидно, дає нерівність $\sum_{\substack{i \notin I^l \\ j \notin J^l}} c_{ij} x_{ij} \le c_l^*$, тобто $F(x) \le \nu_{i_1 i_2 ... i_l}^{j_1 j_2 ... j_l} + c_l^* = \xi_{i_1 i_2 ... i_l}^{j_1 j_2 ... j_l} \quad \forall x \in D_{i_1 i_2 ... i_l}^{j_1 j_2 ... j_l}$. Що і треба було довести.

Алгоритм розв'язування задачі методом гілок та меж

Крок 1. Упорядковуємо та пронумеруємо одним індексом по незростанню елементи матриці ефективності C:

$$\overline{c}_1 \ge ... \ge \overline{c}_k, \tag{8}$$

де $\overline{c}_j \in \{c_{11}, ..., c_{nn}\}$.

Крок 2. За допомогою «жадібного» алгоритму знаходимо допустимий розв'язок задачі про призначення і відповідне значення сумарної ефективності як суму з n елементів матриці ефективності F_0. Цей алгоритм може бути таким. Нехай на початку $F_0 = 0$.

Знаходимо найбільший елемент матриці, додаємо його до F_0, викреслюємо рядок і стовпець, в якому знаходиться знайдений елемент. З отриманою матрицею робимо те, що й з вихідною, поки не залишиться один елемент, який також додаємо до F_0. F_0 відіграє роль поточного рекордного значення цільової функції задачі, тобто найбільше зі знайдених значень.

Оскільки знайдене F_0 не є гарантовано оптимальним, то його можна спробувати покращити у наступний спосіб. Спираючись на той факт, що в оптимальному розв'язку містяться доданки c_{ij}, які не менші, ніж n найбільших елементів в упорядкуванні (8), починати визначення F_0 можна не тільки з найбільшого, а з будь-якого з n «найбільших» елементів в (8), вибираючи в якості F_0 з одержаних n сум найбільшу.

Крок 3. Задаємо початкові значення $l = 0, \tau = 0$, l – номер рівня дерева, τ – номер елемента матриці, що використовується в підмножині. Позначаємо для одноманітності формул $C = C^0$, $D = D_{i_0}^{j_0}$.

Зауваження. В кожній підмножині допустимих розв'язків, що розглядаються в алгоритмі, значення τ своє, тому для $D_{i_0}^{j_0}$ τ позначимо $\tau_{i_0}^{j_0}$ (далі i_0, j_0 при наявності i_1, j_1 опускаємо).

Крок 4. Збільшуємо l на одиницю $l := l + 1$.

Крок 5. Збільшуємо на одиницю номер елемента множини C^l $\tau_{i_0 ... i_l}^{j_0 ... j_l} := \tau_{i_0 ... i_l}^{j_0 ... j_l} + 1$. Якщо $\tau_{i_0 ... i_l}^{j_0 ... j_l} = (n - l)^2$ $\forall l \in J_n$ та $l = n$, то перехід на крок 12; при $l < n$ хоча б для одного l – перехід на крок 11, інакше (тобто коли $\tau_{i_0 ... i_l}^{j_0 ... j_l} \ne (n - l)^2$) – крок 6.

Крок 6. Коефіцієнту цільової функції ставимо у відповідність елемент множини G (одиницю) в якості відповідного значення x_{ij}. Для цього вибираємо наступний елемент c_τ^{l-1} матриці C^{l-1} в порядку (6), який в С має позначення $c_{i_l j_l}$. Задаємо $x_{i_l j_l}=1$. Виокремлюємо підмножину $D_{i_1 i_2 \dots i_l}^{j_1 j_2 \dots j_l}$ з підмножини $D_{i_0 i_1 i_2 \dots i_{l-1}}^{j_0 j_1 j_2 \dots j_{l-1}}$. Далі таку підмножину позначатимемо $D_{i_1 i_2 \dots i_l}^{j_1 j_2 \dots j_l}$. Утворюємо матрицю C^l з C^{l-1}, викресливши рядок i_l, стовпець j_l, (тобто переходимо до наступного ($(l+1)$-го) рівня дерева галуження). Елементи C^l перепозначимо згідно з (6).

Крок 7. Якщо $l \neq n$, то перехід на крок 8. Інакше $(n=l)$, обчислюємо $F(x)$ при $x_{i_1 j_1}=x_{i_2 j_2}=\dots=x_{i_n j_n}=1$, інші $x_{ij}=0$. Якщо $F(x)\geq F_0$, то $F_0:=F(x)$. Перехід на крок 11.

Крок 8. Знаходимо для підмножини $D_{i_1 i_2 \dots i_l}^{j_1 j_2 \dots j_l}$ оцінку $\xi_{i_1 i_2 \dots i_l}^{j_1 j_2 \dots j_l}$, що обчислюється за формулою (7).

Крок 9. Порівнюємо оцінку $\xi_{i_1 i_2 \dots i_l}^{j_1 j_2 \dots j_l}$ із значенням F_0. Якщо $\xi_{i_1 i_2 \dots i_l}^{j_1 j_2 \dots j_l}\geq F_0$, переходимо на крок 4, інакше на крок 10.

Крок 10. Оскільки $\xi_{i_1 i_2 \dots i_l}^{j_1 j_2 \dots j_l}<F_0$, то подальше галуження поточної підмножини $D_{i_1 i_2 \dots i_l}^{j_1 j_2 \dots j_l}$ припиняється, вона відсікається.

Крок 11. Якщо $\tau_{i_1 \dots i_l}^{j_1 \dots j_l}=(n-l)^2$, то перехід на крок 12, інакше на крок 5.

Крок 12. Повернення на $(l-1)$-й рівень дерева. Для цього використовуємо останню розглянуту підмножину цього рівня $D_{i_1 i_2 \dots i_{l-1}}^{j_1 j_2 \dots j_{l-1}}$. Тобто зменшуємо l на одиницю: $l:=l-1$. Перехід на крок 5.

Крок 13. Вивід відповіді – значення цільової функції F_0 та набір векторів *x*, множина всіх оптимальних переставлень. Зупинка.

Проілюструємо елементи виконання алгоритму на прикладі. Нехай задана матриця ефективності *C* для задачі про призначення. Знайти розв'язок задачі за допомогою МГМ.

$$C=\begin{pmatrix} 3 & 7 & 9 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 4 \\ 2 & 2 & 6 & 3 \\ 4 & 5 & 7 & 4 \end{pmatrix}.$$

Упорядковуємо по незростанню елементи матриці ефективності *C*:

$9=c_{13}>7=c_{12}\geq 7=c_{43}>6=c_{14}\geq 6=c_{33}>5=c_{23}\geq 5=c_{42}>4=c_{22}\geq 4=c_{24}\geq$
$\geq 4=c_{41}\geq 4=c_{44}>3=c_{11}\geq 3=c_{21}\geq 3=c_{34}>2=c_{31}\geq 2=c_{32}$.

За допомогою жадібного алгоритму знаходимо F_0, починаючи визначення з *n* найбільших значень c_{ij}, $F_0=21$.

$$F_0=c_{12}+c_{33}+c_{24}+c_{41}. \tag{9}$$

На першому рівні галуження привласнює $x_{13}=1$, утворюємо D_1^3. Знаходимо для D_1^3 перший доданок оцінки (7) $\nu_1^3=9$ та оцінку $\xi_1^3=22>F_0$. Продовжуємо галуження,

переходимо до другого рівня $(l=2)$, утворюємо D_{14}^{32}: $x_{42}=1$, $\nu_{14}^{32}=14$, $\xi_{14}^{32}=21\geq F_0$. Аналогічно на третьому рівні $(l=3)$ галуження – D_{142}^{324} : $x_{24}=1$, $\nu_{142}^{324}=17$, $\xi_{142}^{324}=20<F_0$, тому підмножина D_{142}^{324} відсікається (на рис. 1 знак $\otimes$). Переходимо до наступного елемента матриці на тому ж рівні $(l=3)$ і так далі (рис. 1).

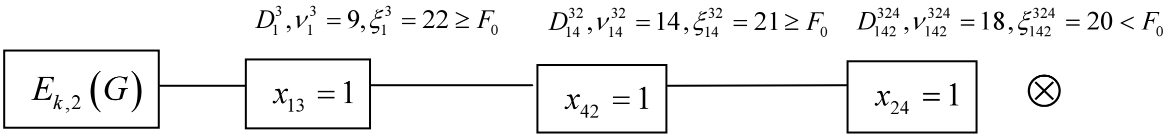


Рисунок 1 – Фрагмент дерева розв’язків для трьох підмножин

Для наведеного прикладу МГМ показав, що покращення F_0 не відбулося. Отже розв’язком є $F_0 = 21$ при призначенні, що задається формулою (9), тобто $x_{12}=x_{33}=x_{24}=x_{41}$.

Висновки

У статті розроблено один з алгоритмів пошуку розв’язків методом гілок та меж для задачі про призначення. Побудовано нову математичну модель задачі. Сформульовано та доведено твердження про покращення оцінки допоміжних підмножин. Детально описано способи галуження та відсікання порожніх та безперспективних підмножин.

В подальшому доцільно розглянути поширення способів галуження, оцінювання і відсікання, наведених в роботі, до задач теорії розкладів [2].

Література

1. Сергиенко И.В. Модели и методы решения на ЭВМ комбинаторных задач оптимизации / И.В. Сергиенко, М.Ф. Каспшицкая – К. : Наукова думка, 1981. – 288 с.
2. Муха В.С. Задача ученого расписания: постановка и решение / В.С. Муха // Проблемы управления и информатики. – 2012 – № 6. – С. 125-135.
3. Стоян Ю.Г. Теорія і методи евклідової комбінаторної оптимізації [Електронний ресурс] / Ю.Г. Стоян, О.О. Ємець. – К. : Ін-т системн. досліджень освіти, 1993. – 188 с. – Режим доступу : http://dspace.uccu.org.ua/handle/123456789/487.
4. Ємець О.О. Транспортні задачі комбінаторного типу: властивості, розв’язування, узагальнення [Електронний ресурс] / О.О. Ємець, Т.О. Парфьонова. – Полтава : ПУЕТ, 2011. – 174 с. – Режим доступу : http://dspace.uccu.org.ua/handle/123456789/353.
5. Ємець О.О. Розв’язування задач комбінаторної оптимізації на нечітких множинах [Електронний ресурс] / О.О. Ємець, Ол-ра О. Ємець. – Полтава : ПУЕТ, 2011. – 239 с. – Режим доступу : http://dspace.uccu.org.ua/handle/123456789/352.
6. Линейное и нелинейное программирование / И.Н. Ляшенко, Е.А. Карагодова, Н.В. Чернишова, Н.З. Шор ; [под общ. ред. И.Н. Ляшенко]. – Киев : Вища шк., 1975. – 372 с.

Literatura

1. Sergienko I.V. Modeli i metody reshenija na JeVM kombinatornyh zadach optimizacii / I.V. Sergienko, M.F. Kaspshickaja – K. : Naukova dumka, 1981. – 288 s.
2. Muha V.S. Zadacha uchenogo raspisanija: postanovka i reshenie / V.S. Muha // Problemy upravlenija i informatiki. – 2012 – № 6. – S. 125-135.

3. Stojan Ju.G. Teorija i metodi evklidovoї kombinatornoї optimizacії [Elektronnij resurs] / Ju.G. Stojan, O.O. Єmec'. – K. : In-t sistemn. doslidzhen' osviti, 1993. – 188 s. – Rezhim dostupu : http://dspace.uccu.org.ua/handle/123456789/487.
4. Єmec' O.O. Transportni zadachi kombinatornogo tipu: vlastivosti, rozv'jazuvannja, uzagal'nennja [Elektronnij resurs] / O.O. Єmec', T.O. Parf'onova. – Poltava : PUET, 2011. – 174 s. – Rezhim dostupu : http://dspace.uccu.org.ua/handle/123456789/353.
5. Єmec' O.O. Rozv'jazuvannja zadach kombinatornoї optimizacії na nechitkih mnozhinah [Elektronnij resurs] / O.O. Єmec', Ol-ra O. Єmec'. – Poltava : PUET, 2011. – 239 s. – Rezhim dostupu : http://dspace.uccu.org.ua/handle/123456789/352.
6. Linejnoe i nelinejnoe programmirovanie / I.N. Ljashenko, E.A. Karagodova, N.V. Chernishova, N.Z. Shor ; [pod obshh. red. I.N. Ljashenko]. – Kiev : Vishha shk., 1975. – 372 s.

RESUME

M.V. Leonova

Algorithm Solving the Problem of Optimal Function by Method of Branch and Bound

The article deals with the application of one of the most versatile methods for solving optimization problems – method branch and bound. Model problems of this type, but with additional conditions (task scheduling theory) are relevant, but they can not be used polynomial algorithms. The study of such problems are relevant algorithms in the class of branches and bounds. In connection with this algorithm branch and bound method for the assignment problem. Improved estimation of secondary subset D_l, defined auxiliary subset evaluation method, the way of its establishment and rule pruning unpromising or empty subsets D_l.

Стаття надійшла до редакції 09.04.2013.